الاحداثيات القطبية

يعتمد نظام الاحداثيات الديكارتية على التقابل بين ازواج مرتبة من الاعداد الحقيقية ونقاط في مستوي الاحداثيات في مستوي ثنائي البعد
ولكن هذا النظام ليس وحيد وسوف نقدم نظام احداثي اخر (ثنائي البعد) هو نظام الاحداثيات القطبية .

نظام الاحداثيات القطبية

لتكن O نقطة ثابتة وليكن $\overrightarrow{OX}$ شعاعا ثابتا ينبعث من O ويسمى بالمحور القطبي كما تسمي النقطة O بالقطب ويسمى النظام بالنظام القطبي
ولتعين النقطة p التي احداثياتها (r, θ) في نظام الاحداثيات القطبية نتبع ما يلي

- نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي يصنع مع المحور القطبي زاوية قدرها θ مارا بالقطب O وتسمى θ بالزاوية القطبية .
- نأخذ على المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ المسافة الموجهة r بدا بالقطب O ويسمى r بالبعد القطبي مع مراعاة ما يلي

a) تعتبر الزاوية θ موجبة اذا قيست في اتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة وتعتبر θ سالبة اذا قيست باتجاه نفس اتجاه حركة عقارب الساعة .

b) يكون r موجب اذا قيس من النقطة o باتجاه القطعة المستقيمة المحددة للزاوية القطبية (اي يكون ضلعا للزاوية القطبية).

c) يكون r سالب اذا قيس بالاتجاه المضاد (اي ان يكون امتداد لضلع الزاوية في الاتجاه المعاكس)

ملاحظة /

a) أي نقطة وحيدة في النظام القطبي عدد غير منته من ازواج الاحداثيات القطبية اي انه للنقطة ذات الاحداثيين القطبيين (r, θ) كل الاحداثيات القطبية من الشكل

$(r, \theta + 2n\pi)$ اذا كانت r موجبة و $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$ اذا كانت r سالبة

حيث n عدد صحيح.

b) كل ثنائي مرتب من $p(r, \theta)$ يعينان نقطة وحيدة في المستوي لكن العكس غير صحيح فكل نقطة في مستوي يمكن ان نعبر عنها مجموعات لا نهائية من الثنائيات القطبية

.

العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

*يمكن ان نحصل على الثنائي (r, θ) من الثنائي الديكارتي (x, y) كما في العلاقة التالية

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad , \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

باستخدام نظرية فيثاغورس نحصل على

$$r^2 = x^2 + y^2 \,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ملاحظات //

- لتحويل نقطة من النظام القطبي الى النظام الديكارتي نستخدم

$$x = r\cos\theta \qquad and \qquad y = r\sin\theta$$

- لتحويل احداثيات نقطة من النظام الديكارتي الى النظام القطبي نستخدم

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad and \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

مع مراعاة اشارة x, y

الجدول التالي يوضح طريقة التعامل مع x, y

شكل الزاوية	الربع الذي تقع فيه الزاوية	اشارة y	اشارة x
$\theta = \emptyset$	الاول	+	+
$\theta = \pi - \emptyset$	الثاني	+	-
$\theta = \pi + \emptyset$	الثالث	-	-
$\theta = 2\pi - \emptyset$ $Or\ \theta = -\emptyset$	الرابع	-	+

حالات خاصة

قطبي

ديكارتي

$$(x,0) = \begin{cases} (x,0) & at\ \ x > 0 \\ (|x|, \pi) & at\ \ x < 0 \end{cases}$$

$$(0,y) = \begin{cases} \left(y, \frac{\pi}{2}\right) & at\ \ y > 0 \\ \left(|y|, \frac{3\pi}{2}\right) & at\ \ y < 0 \end{cases}$$

مثال / اوجد الاحداثيات الديكارتية لكل من النقاط المكتوبة بالصيغة القطبية

$$1.\ P_1(3,0) \quad 2.\ P_2\left(5,\frac{\pi}{2}\right) \quad 3.\ P_3\left(4,\frac{\pi}{6}\right) \quad 4.\ P_4\left(2,\frac{3\pi}{4}\right)$$

الحل/

$P_1(3,0)$

$$r = 3, \theta = 0 \qquad x = r\cos\theta \Rightarrow x = 3\cos 0 \Rightarrow x = 3$$

$$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 3\sin 0 \Rightarrow y = 0$$

الاحداثيات الديكارتية للنقطة $(3,0)$ اي ان النقطة P_1 في الاحداثيات القطبية هي نفسها في الاحداثيات الديكارتية.

$P_2\left(5,\frac{\pi}{2}\right)$

$$r = 5\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2} \qquad x = r\cos\theta \Rightarrow x = 5\cos\frac{\pi}{2}$$

$$x = 5(0) \Rightarrow x = 0$$

$$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 5\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 5(1) \Rightarrow y = 5$$

النقطة P_2 في الاحداثيات الديكارتية تكون $(0,5)$

$P_3\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$

$$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 4\cos\frac{\pi}{6}$$

$$x = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 4\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = 2$$

النقطة P_3في الاحداثيات الديكارتية تكون$(2\sqrt{3}, 2)$

$P_4\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$

$$x = r\cos\theta \Rightarrow x = 2\cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = -\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta \Rightarrow y = 2\sin\frac{3\pi}{4} \Rightarrow y = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

النقطة P_4في الاحداثيات الديكارتية تكون$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\therefore$

H.W

1. $P_1\left(6, \frac{16\pi}{3}\right)$ 2. $P_2\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right)$

مثال/ اوجد الاحداثيات القطبية لكل من النقاط المكتوبة بنظام الاحداثيات الديكارتية

1. $(0,4)$ 2. $(0,-5)$ 3. $(2,0)$ 4. $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ 5. $(6, -2\sqrt{3})$

الحل /

1. بما ان النقطة واقعة على محور Y الموجب لذلك فان النقطة$(0,4)$ في الاحداثيات القطبية تكون $P(4,\frac{\pi}{2})$.

2.بما ان النقطة واقعة على محور Y السالب لذلك فان النقطة$(0,-5)$ في الاحداثيات القطبية تكون $= \left(5,\frac{3\pi}{2}\right) = P\left(|-5|,\frac{3\pi}{2}\right)$.

3 . بما ان النقطة واقعة على محور x الموجب لذلك فان النقطة$(2,0)$ في الاحداثيات القطبية تكون $(2,0)$

.4 $\left(-2,2\sqrt{3}\right)$.

بما ان النقطة واقعة في الربع الثاني

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \sqrt{4 + 12} \Rightarrow r = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) \Rightarrow \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore P(4,\frac{2\pi}{3})$$

.5 $\left(6,-2\sqrt{3}\right)$

بما ان النقطة واقعة في الربع الرابع

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow r=\sqrt{(6)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$r=\sqrt{48}\ \Rightarrow r=4\sqrt{3}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$$

$$\therefore\ \theta=2\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\theta=\frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore\ P(4\sqrt{3},\frac{11\pi}{6})$$

H.W

$$p(-1,-3)$$

مثال/ اوجد جميع الاحداثيات القطبية للنقاط التالية

$$(3,3)\quad(-2,2)$$

1.P$(3,3)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow r=\sqrt{(3)^2+(3)^2}$$

$$r=\sqrt{18}\ \Rightarrow r=3\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) \Rightarrow \tan^{-1}(1)$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ الزاوية تقع في الربع الاول

$$\therefore P(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$$

وجيع الاحداثيات القطبية للنقطة $P(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ تأخذ الشكل التالي

$$(r,\theta+2n\pi) or (-r,\theta+(2n+1)\pi)$$

$(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+2n\pi) or (-3\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}+2n\pi))$; حيث $n \in I$

P(−2,2)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r = \sqrt{(2)^2+(2)^2}$$

$$r = \sqrt{8} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right) \Rightarrow \tan^{-1}(-1)$$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$ الزاوية تقع في الربع الثاني

$$\therefore P(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$$

وجيع الاحداثيات القطبية للنقطة $P(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$ تأخذ الشكل التالي

$$(r,\theta+2n\pi) or (-r,\theta+(2n+1)\pi)$$

$$(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi) or (-2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi))$$; حيث $n \in I$

H . W

$$P(3, -1)$$

مثال/ حول المعادلات الديكارتية الى معادلات قطبية

1. $x^2 - y^2 = 5$

$$(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta^{2^2} = 5$$

$$r^2 \cos \theta^2 - r^2 \sin \theta^2 = 5$$

$$r^2 (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) = 5$$

$$r^2 \cos 2x = 5$$

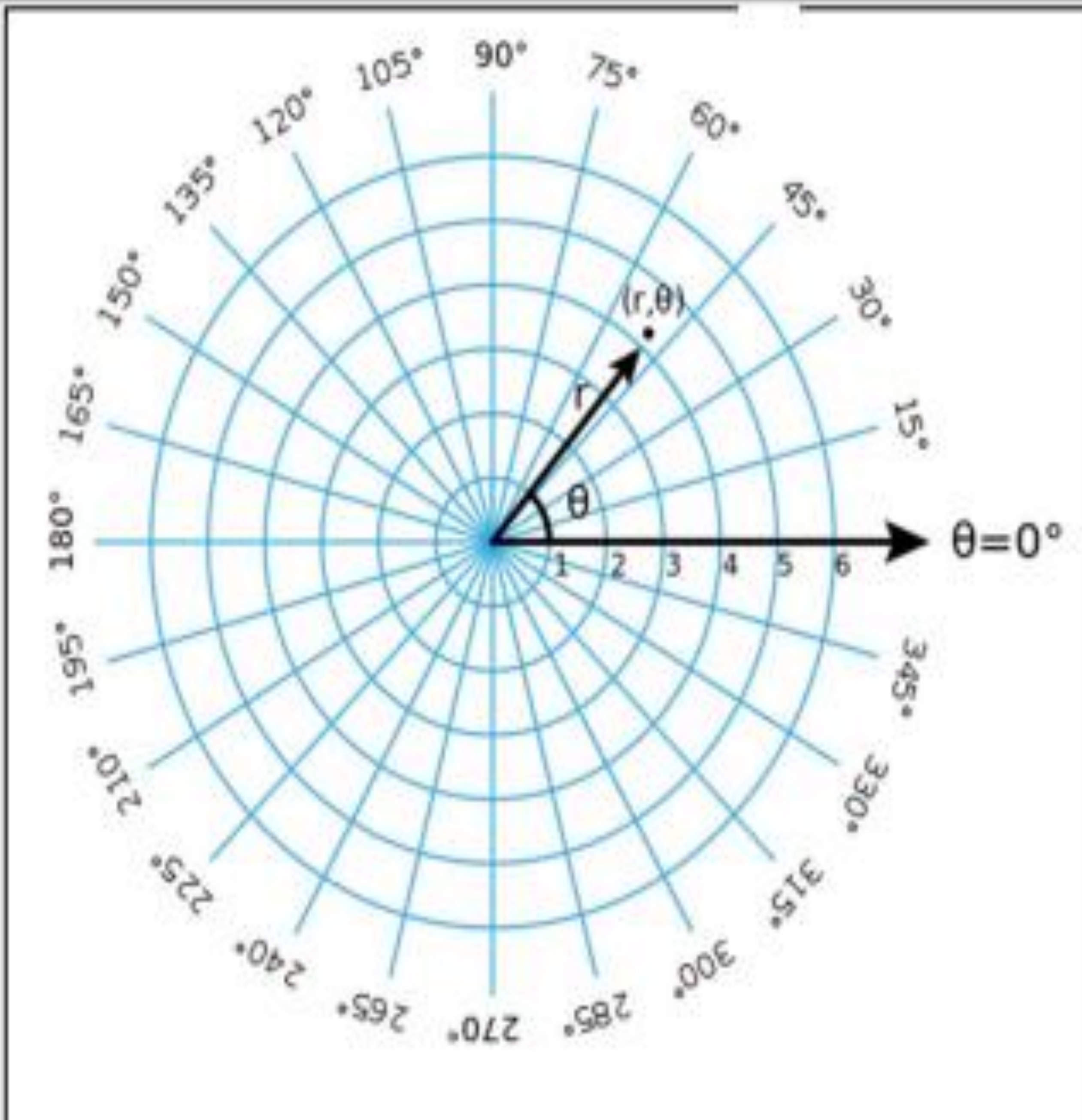
$$r^2 = 5 \frac{1}{\cos 2x}$$

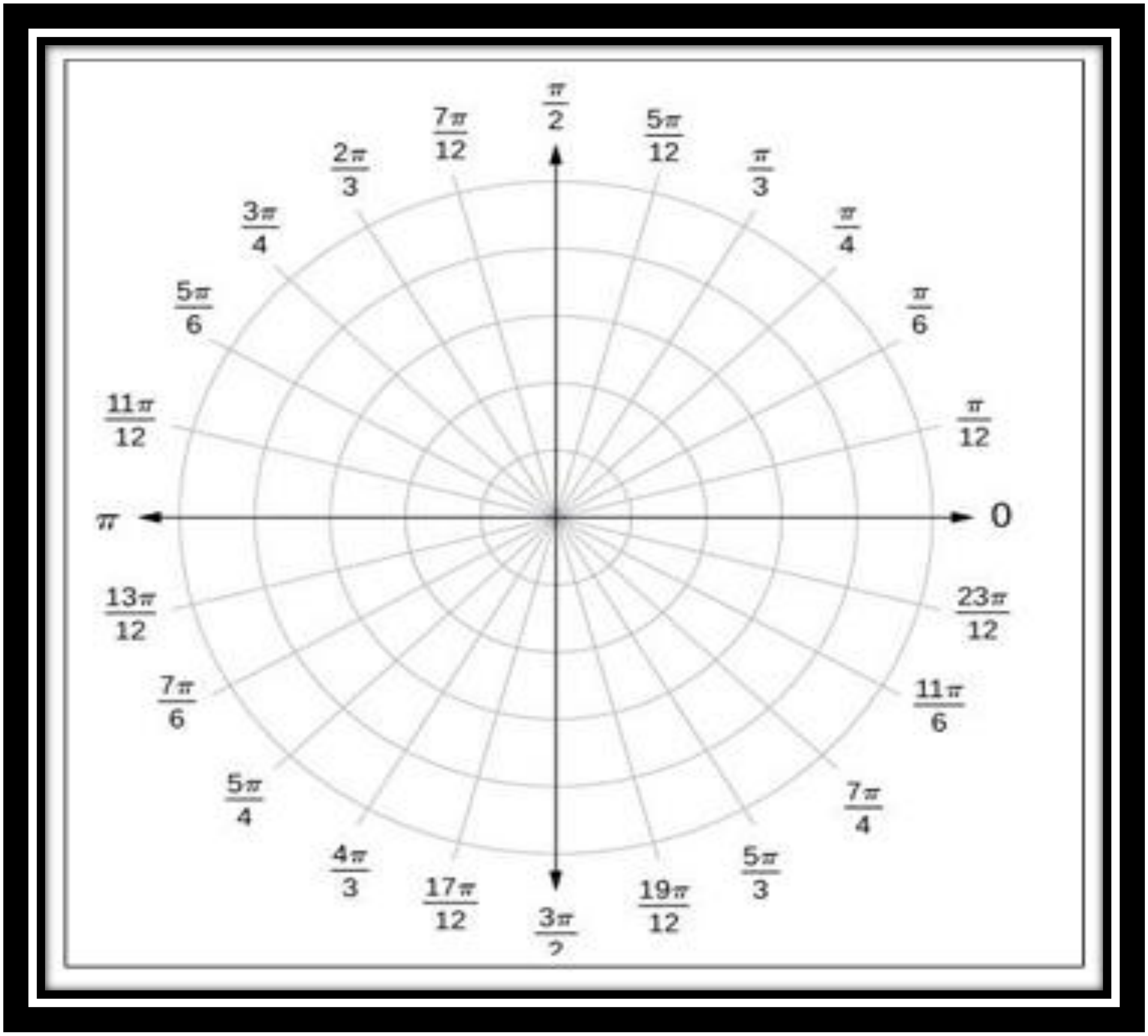
$$r^2 = 5 \sec 2\theta$$

H.W

1. $X + 3Y = 2$
2. $XY = 3$

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not defined	$-\sqrt{3}$	0	Not defined	0
$\csc(\theta)$	Not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	Not defined	-1	Not defined
$\sec(\theta)$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not defined	-2	-1	Not defined	1
$\cot(\theta)$	Not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	Not defined	0	Not defined


90°
75°
60°
45°
30°
15°
θ=0°
345°
330°
315°
300°
285°
270°
265°
240°
225°
210°
195°
180°
165°
150°
135°
120°
105°
(r,θ)
r
θ
1
2
3
4
5
6


π/2
5π/12
π/3
π/4
π/6
π/12
0
23π/12
11π/6
7π/4
5π/3
19π/12
3π/2
17π/12
4π/3
5π/4
7π/6
13π/12
π
11π/12
5π/6
3π/4
2π/3
7π/12