Real Functions الدوال الحقيقية

Sets of Numbers مجموعة الاعداد

الأعداد الطبيعية N = {1, 2, 3,.}

الأعداد الصحيحة Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2,...}

الاعداد النسبية $Q = \{\frac{a}{b},\ a, b \in z, b \neq 0\}$

الاعداد غير النسبية : تشمل الاعداد التي لا يمكن كتابتها كحاصل قسمة عددين صحيحين.... $I\ Q = \pi, e, \sqrt{5}, \sqrt{7}$

الأعداد الحقيقية $R = \{Q \cup IQ\}$

Intervals الفترات

ليكن a, b عددين حقيقيين $(a, b \in R)$ بحيث $a < b$ نسمي المجموعات الجزئية من R بالفترات ونعرفها

كما يلي:

1. **الفترة المفتوحة** $(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$ ، (a, b)
2. **الفترة المغلقة** $[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$, $[a, b]$
3. **الفترة النصف مفتوحة او نصف مغلقة** $[a,b), (a,b]$

$$(a,b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$$

4. **الفترات غير المنتهية** $(-\infty, \infty), (-\infty, b)(-\infty, b], (a, \infty), [a,\infty)$

$$[a,\infty) = \{x \in R: x \geq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in R: x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in R: x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = R$$

منطلق الدالة الحقيقية ومداها Domain and Range of Real Functions

لإيجاد منطلق دالة حقيقية فإننا نجد مجموع النقاط $x \in R$ بحيث تكون الدالة معرفة عند هذه النقاط، فمثلاً إذا كان لدينا دالة كسرية فإننا نستبعد أصفار المقام ؛ لأن الدالة الكسرية غير معرفة عند أصفار المقام. أما إذا كانت الدالة تحتوي على جذر فإن ما تحت الجذر لابد أن يكون غير سالب

الدالة : وهي علاقة بين مجموعتين بحيث ان كل عنصر من مجموعة المجال يرتبط بعنصر في المجال المقابل ويمكن كتابتها $y = f(x)$.

منطلق الدالة **Domain** :وهو مجموعة المجال أي هو كل قيم x التي تجعل الدالة معرفة.

مدى الدالة **RANGE**:وهو مجموعة جزئية من مجموعة المجال المقابل أي هو كل قيمy التي تعتمد على قيم x.

* سوف نرمز للمنطلق بالرمز D_f و للمدى بالرمز R_f.

من الدوال التي سوف نتطرق لها هي:

1) الدالة كثيرة الحدود 2) الدالة الجذرية 3) الدالة الكسرية

دوال كثيرة الحدود

تعريف: هي دالة تتكون من حد او مجموعة حدود، وكل حد عبارة عن ثابت مضروب في x متغير مستقل مرفوع الى اس صحيح غير سالب(صفر او موجب).

ملاحظة/

1. المجال D_f للدالة كثرة الحدود هو $R = D_f$.
2. لإيجاد المدى R_f للدالة كثيرة الحدود

(a) اذا كان الاس فردي فان المدى $\mathbb{R}_f = R$

(b) اما اذا كان الاس زوجي نستخدم العلاقة التالية

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

مثال/ اوجد المنطلق والمدى لكل من الدوال التالية:

1. $f(x) = x + 3$
2. $f(x) = 3x^3 - 2$
3. $f(x) = 2x^2 - 3$
4. $f(x) = 3x^2 - 7x + 6$

الحل:

1. $D_f = \mathrm{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}_f = \mathrm{R}$
2. $D_f = R$ $\quad$ $\mathbb{R}_f = \mathrm{R}$
3. $D_f = R$

$\mathbb{R}_f \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3$

$y = 2x^2 - 3 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 3 - y$

$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -3 - y$

$b^2 - 4ac \geq 0$

$(0)^2 - 4(2)(-3 - y) \geq 0$

$24 + 8y \geq 0$ $\quad$ اضافة للطرفين -24

$\Rightarrow 8y \geq -24$ $\quad$ نضرب الطرفين $\times \frac{1}{8}$

$\Rightarrow y \geq -3$

$$R_f = [-3, \infty)$$

4. $D_f = R$

$\mathbb{R}_f \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 7x + 6 \Rightarrow$

$y = 3x^2 - 7x + 6 \Rightarrow 0 = 3x^2 - 7x + 6 - y$

$a = 3, \quad b = -7, \quad c = 6 - y$

$b^2 - 4ac \geq 0$

$49 - 72 + 12y \geq 0$

$-23 + 12y \geq 0$ 23 اضافة للطرفين

$12y \geq 23$

$y \geq \frac{23}{12} \Rightarrow R_f = [\frac{23}{12}, \infty)$

الدالة الجذرية

تعريف: هي دالة تحتوي على جذر.

عند ايجاد المنطلق للدالة الجذرية يجب ان لا تكون القيمة داخل الجذر سالب لان ذلك يجعل الدالة غير معرفة، كما في الخطوات التالية.

1. لا يجاد المنطلق (المجال) نقوم بجعل المقدار داخل الجذر اكبر او يساوي صفر ومن ثم نقوم بحل المتباينة جبريا لا يجاد قيم x التي تجعل المقدار داخل الجذر سالبا .
2. نقوم بتحديد المنطلق اعتمادا على قيمة x في الخطوة السابقة اي يكون المنطلق جميع الاعداد الحقيقية ماعدا القيم التي تجعل المقدار تحت الجذر سالب

$$D = \{x \in R: \text{ما تحت الجذر} \geq 0\}.$$

3. نقوم بتحديد المدى اعتماد على الخطوة 2.

ملاحظة// اذا كان اس الجذر فردي فان مجال الدالة هو R.

مثال / اوجد المنطلق والمدى لكل من الدوال التالية:

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$

$$x - 2 \geq 0 \qquad \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow$$

$$D_f = \{x \in R : x \geq 2\} or D_f = [2, \infty)$$

$$R_f = \{y \in R : y \geq 0\} or R_f = [0, \infty)$$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 4$$

$$|x| \geq 2 \Rightarrow \quad x \geq 2 \ , \ x \leq -2$$

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$R_f = \{y \in R : y \geq 0\} or R_f = [0, \infty)$$

3. $f(x) = \sqrt{5x + 7}$

$$5x + 7 \geq 0 \ \Rightarrow x \geq -\frac{7}{5}$$

$$D_f = [-\frac{7}{5}, \infty)$$

$$R_f = \{y \in R : y \geq 0\} \quad or \quad R_f = [0, \infty)$$

الدوال الكسرية

لإيجاد المنطلق للدوال الكسرية يجب ان يكون المقام غير مساوي للصفر و ذلك لان الدالة ستصبح غير معرفة ، ولإيجاد المنطلق والمدى نتبع الخطوات التالية:

1. جعل المقام يساوي صفر لإيجاد قيم xالتي تجعل الدالة غير معرفة.
2. .يكون المنطلق هو جميع الاعداد الحقيقية ما عدا القيم التي تجعل المقام يساوي صفر.

3. لإيجاد المدى نكتب x بدلالة yعن طريق ضرب الطرفين في الوسطين وبعد معالجة الحدود جبريا ستظهر دالة بالشكل $x = f(y)$ وهي كسرية أيضا ويكون المدى جميع القيم ماعدا القيمة التي تجعل المقام مساويا للصفر.

مثال/ اوجد المنطلق والمدى لكل من الدوال التالية:

1. $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

الحل/

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$D_f = R\backslash\{-2\} \; or \; D_f = \{x \in R : x \neq -2\}$$

لإيجاد المدى $\mathbb{R}_f$ نجد حاصل ضرب الطرفين في الوسطين للدالة وبعدها نستخرج xبدلالة y

ويكون المدى جميع القيم ماعدا القيم التي تجعل المقام صفر.

$$y = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = x - 3$$

$$yx + 2y = x - 3 \Rightarrow xy - x = -3 - 2y$$

$$x(y-1) = -(3+2y) \Rightarrow x = \frac{-(3+2y)}{(y-1)}$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$R_f = R\backslash\{1\} \; or \; R_f = \{y \in R : x \neq 1\}$$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$

$$x \geq 0 \quad ,$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$D_f = [0, \infty) \cup (3, \infty)$$

لإيجاد المدى $\mathbb{R}_f$ نقوم بتربيع الطرفين لان الدالة جذرية ومن ثم نجد حاصل ضرب الطرفين في الوسطين للدالة وبعدها نستخرج xبدلالة y

ويكون المدى جميع القيم ماعدا القيم التي تجعل المقام صفر.

$$y^2 = \frac{x}{x-3} \Rightarrow y^2(x-3) = x$$

$$y^2x - 3y^2 = x \Rightarrow xy^2 - x = 3y^2$$

$$x(y^2-1) = 3y^2 \Rightarrow x = \frac{3y^2}{(y^2-1)}$$

$$y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$R_f = R\backslash\{-1,1\} \; or \; D_f = \{y \in R; y \geq 0 : y \neq \pm 1\}$$

الواجب

1/ اوجد المجال للدوال التالية

$$1)\ y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad 2)\ y = \frac{x+3}{x^2-x-12}$$

$$3)\ y = \sqrt{2x+7} \qquad 4)\ y = x^2 - 2x - 15$$

2/ اوجد المدى للدوال التالية

$$1)\ y = \frac{x}{x^2+2} \qquad 2)\ y = x^2 + 3x + 1 \qquad 3)\ f(x) = \sqrt{3-x}$$