الغاية limits

تعريف:

غاية الدالة $f(x)$ هو التعبير عن سلوك الدالة f عندما x يقترب من قيمة معينة ولتكن a ويعبر عنها رياضيا بالشكل التالي $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

حيث L عدد حقيقي يمثل غاية الدالة .

خصائص الغاية PROPERTIES LIMITS

ليكن $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{L}$ اعداد حقيقية ولتكن الغايات $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ معرفتان وموجودتان فان

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a}[\, cf(x)] = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$
6. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad where \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = [L_1]^n \quad where\; n \in N$
8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1} \quad where$

$$\lim_{x\to a} f(x) > 0 \quad n \;\; is\; even$$

مثال/ جد الغايات التالية:

1. $\lim_{x\to 4} 7 = 7$
2. $\lim_{x\to 9} x = 9$
3. $\lim_{x\to 2} \mathrm{x} + 7 = \lim_{x\to 2} \mathrm{x} + \lim_{x\to 2} 7 = 2 + 7 = 9$
4. $\lim_{x\to 4} 8\mathrm{x}^2 = \lim_{x\to 4} 8 \cdot \lim_{x\to 4} \mathrm{x}^2 = 8 \cdot 4^2 = 128$
5. $\lim_{x\to 3}(4x^3 + 2x^2 - 6x + 5) = 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 5$

$$= 108 + 18 - 18 + 5 = 113$$

6. $\lim_{x\to 5}(2x-7)^3 = \left[\lim_{x\to 5}(2x-7)\right]^3 = (2 \cdot 5 - 7)^3 = 3^3 = 27$
7. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2 - 10} = \sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 - 10} = \sqrt{6}$

ملاحظة: لحل الأسئلة التي تحتوي على غايات الدوال الجبرية يمكن أن نستخدم عدة طرق وخصوصاً إذا كانت الدالة نسبية (كسرية) ومن هذه الطرق:

(1) التعويض المباشر إذا كانت الدالة عبارة عن متعددة حدود سواءً كانت كمعادلة أو دالة كسرية بشرط أن تكون قيمة الغاية معرفة بعد التعويض أي تساوي عدد حقيقي. اما إذا كانت قيمة الغاية تساوي احدى حالات عدم التعين التالية: $\left(\frac{0}{0} ، \frac{\infty}{\infty} ، \frac{0}{\infty} ، \frac{\infty}{0} ،1^{\infty} ،0^{\infty} ،\infty^{0}\right)$ فإننا نقوم بالتالي بحسب ما يتطلب السؤال.

(2) الضرب بمرافق البسط او المقام(المنسب) وتبسيط الحدود ومن ثم التعويض بالقيمة التي تقترب منها.

(3)او تحليل البسط أو المقام بطرق التحليل المعروفة وهي فرق بين مربعين، فرق بين مكعبين، مجموع مكعبين، تحليل بالتجربة، اخراج عوامل مشتركة، .... الخ)

مثال/ جد الغاية للدوال التالية :

$$1)\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1} \quad 2)\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2-9} \quad 3)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1} \quad 4)\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)}{x^2-4}$$

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$$

الحل/

$$1)\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-1}=\frac{2+3}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

$$2)\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2-9}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{x-3}$$

$$=\frac{-3-4}{-3-3}=\frac{-7}{-6}=\frac{7}{6}$$

$$3)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x=1$$

$$4)\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)}{x+2}$$

$$=\frac{(2)^2+2(2)+4}{x+2}=\frac{4+4+4}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$5)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x})^2-4}{x\sqrt{4+x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x\sqrt{4+x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{4+x}+2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4+0}+2} = \frac{1}{4}$$

الغايات limits

نقول ان العدد الحقيقي Lهو غاية الدالة $f(x)$ عند $x \to x_\circ$ ونكتب

$\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$ واذا كان $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L_1$ تمثل الغاية من اليمين

و $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L_2$ تمثل الغاية من اليسارفان غاية الدالة تكون موجودة اذا

كان $L_1 = L_2$

مثال/ جد الغاية للدوال التالية

1) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2+4 \ , & x \geq 1 \\ 5x \ , & x < 1 \end{cases}$ $\lim_{x \to 1} f(x), \lim_{x \to 2} f(x)$ اوجد

الحل/

1) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \ , & x \geq 2 \\ -(x-2) \ , & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1 = L_1$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1=\ L_2$$

الغاية غير موجودة $L_1 \neq L_2$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+4\ , & x\geq 1 \\ 5x\ , & x<1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^+}(x^2+4)=5=L_1$

$\lim_{x\to 1^-}(5x)=5=L_2$

$L_1=L_2$ الغاية موجودة

$\lim_{x\to 2} f(x)$=$x^2+4=8$

غاية الدوال المثلثية

1. $\lim_{x\to 0}\sin(x)=\sin(0)=0$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\tan(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(0)}{\cos(0)}=\frac{0}{1}=0$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\sec(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=\frac{1}{\cos(0)}=\frac{1}{1}=1$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\csc(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin(x)}=\frac{1}{\sin(0)}=\frac{1}{0}=\infty$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\cot(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\tan(x)}=\frac{\cos(0)}{\sin(0)}=\frac{1}{0}=\infty$

بعض الغايات المثلثية الخاصة

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$$

مثال / جد الغاية للدوال التالية

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\sin(x)-3}=\frac{\cos(0)}{\sin 0-3}=\frac{1}{0-3}=-\frac{1}{3}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4x}$$

$$=4\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\right)=4\cdot 1=4$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\,\frac{\sin 3x}{3x}}{4\,\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3}{4}\left(\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}\right)$$

$$=\frac{3(1)}{4(1)}=\frac{3}{4}$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{2x}=2(0)=0$$